Tentamen Vectoranalyse

24 juni 2011, 9:00-12:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+5+10 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^4 - z = 2.$$

1. Bereken het raakvlak aan S in $p_0 = (1, 1, 1)$.
2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van p_0 opgevat kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

   $$z = g(x, y),$$

   met $g(1, 1) = 1$.
3. Toon aan dat S in de buurt van p_0 onder zijn raakvlak in p_0 ligt. (Opmerking: vat ook het raakvlak in p_0 op als grafiek van een functie h. Je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is.)

Opgave 2 (10+15 pt.)
Laat $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^2-functie zijn, en laat $z = g(x, y)$. Via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ wordt z een functie van (r, θ).

1. Druk de partiële afgeleiden $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$ uit in $\frac{\partial z}{\partial r}$ en $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.
2. Toon vervolgens aan dat

   $$xy\,(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}) + (y^2 - x^2)\,\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = z_\theta - r\, z_{r\theta}\,.$$

Z.O.Z.

Opgave 3 (5+7+8 pt.)

Laat a, b en c functies van klasse C^1 zijn van één variabele.

1. Laat zien dat

$$\mathbf{F} = (a(x) + y + z)\,\mathbf{i} + (x + b(y) + z)\,\mathbf{j} + (x + y + c(z))\,\mathbf{k}$$

   conservatief is.

2. Bepaal een scalar potentiaal functie van $\mathbf{F}$.

3. Voor $a(x) = x$, $b(y) = y^2$ en $c(z) = z^3$, bereken de lijn integraal langs het rechte lijnstuk tussen de punten $p = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ en $q = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Verifieer dit resultaat door gebruik te maken van de potentiaal functie van onderdeel 2 .

Opgave 4 (5+5+10 pt.)

Laat S het *oppervlak* in $\mathbb{R}^3$ zijn dat gedefinieerd is door de vergelijking $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Laat C een stuksgewijs C^1, simpele gesloten kromme (Engels: simple closed curve) in het xy-vlak zijn. Laat D het gebied in het xy-vlak zijn dat wordt omsloten door C, neem aan dat elk punt van D de x-coordinaten tussen a en b heeft. Laat S_1 het gedeelte van S zijn dat boven D ligt.

1. Laat zien dat de oppervlakte van S_1 gegeven wordt door

$$\iint_D s'(x)\, dS\,,$$

   waar

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\,,$$

   dat is, s is de lengte functie van de kromme $z = f(x)$.

2. Gebruik onderdeel 1 om te laten zien dat de oppervlakte ook uitgerekend kan worden door middel van de lijnintegraal

$$\oint_C s(x)\, dy\,,$$

   waar C tegen de klok in georiënteerd is.

3. Bereken de oppervlakte van het oppervlak

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$$

   dat boven de rechthoek in het xy-vlak ligt met hoekpunten $(1, \pm 2)$, $(3, \pm 2)$.

Uitwerkingen

Opgave 1. 1. $\nabla f(p_0) = (2,2,3)^T$, dus is de vergelijking van het raakvlak in p_0:

$$0 = \nabla f(p_0) \cdot (x-1, y-1, z-1)^T = 2x + 2y + 3z - 7.$$

2. Aangezien $f_z(0,0,0) = 3 \neq 0$, geldt volgens de Impliciete Functiestelling dat er een C^1-functie g is, gedefiniëerd op een omgeving van $(1,1)$, zó dat $g(1,1) = 1$, terwijl $F(x,y,z) = 0$ in de buurt van $(1,1,1)$ als oplossing heeft: $z = g(x,y)$.

3. De vergelijking van het raakvlak in p_0 is $z = h(x,y) := -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$. We moeten nu aantonen dat

$$\varphi(x,y) := h(x,y) - g(x,y) \geq 0, \tag{1}$$

voor (x,y) in een omgeving van (x_0, y_0).

Uit $f(x,y,g(x,y)) = 0$ volgt via impliciet differentiëren:

$$\begin{aligned} f_x(x,y,g(x,y)) + g_x(x,y)\, f_z(x,y,g(x,y)) &= 0, \\ f_y(x,y,g(x,y)) + g_y(x,y)\, f_z(x,y,g(x,y)) &= 0, \end{aligned}$$

ofwel

$$2x + (4g(x,y)^3 - 1)\, g_x(x,y) = 0, \tag{2}$$
$$2y + (4g(x,y)^3 - 1)\, g_y(x,y) = 0. \tag{3}$$

Invullen van $(x,y) = (1,1)$ geeft:

$$g_x(1,1) = g_y(1,1) = -\tfrac{2}{3}.$$

Omdat $h_x(1,1) = h_y(1,1) = -\frac{2}{3}$, heeft φ een kritiek punt in $(1,1)$ (zoals te verwachten was). Om de aard van dit kritieke punt na te gaan berekenen we de Hessiaan van φ in $(1,1)$. Welnu, uit (2) en (3) volgt:

$$\begin{aligned} 2 + 12g^2(g_x)^2 + (4g^3 - 1)\, g_{xx} &= 0, \\ 12g^2 g_x g_y + (4g^3 - 1)\, g_{xy} &= 0, \\ 2 + 12g^2(g_y)^2 + (4g^3 - 1)\, g_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$g_{xx}(1,1) = \tfrac{22}{9}, \quad g_{xy}(1,1) = -\tfrac{16}{9}, \quad g_{yy}(1,1) = \tfrac{22}{9},$$

dus

$$H_\varphi(x_0, y_0) = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = \tfrac{22}{9}\,\tfrac{22}{9} - (\tfrac{16}{9})^2 > 0.$$

Aangezien $\varphi_{xx}(x_0, y_0) > 0$, heeft φ een lokaal minimum in (x_0, y_0). M.a.w., $\varphi(x,y) = h(x,y) - g(x,y) \geq 0$ voor (x,y) in de buurt van (x_0, y_0).

Opgave 2. 1. Toepassen van de kettingregel op $z = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ geeft

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\,\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial x} + r\,\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \tag{4}$$

Hierbij moeten de partiële afgeleiden van g geëvalueerd worden in $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, die van z in (r, θ).

Oplossen van $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial g}{\partial y}$ uit (4) geeft:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases} \tag{5}$$

2. Differentiëer linker- en rechterlid van de gelijkheden in (5) naar r onder toepassing van de kettingregel. Dit geeft:

$$\cos\theta\,g_{xx} + \sin\theta\,g_{xy} = \cos\theta\,z_{rr} - \frac{\sin\theta}{r}\,z_{r\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\,z_\theta \tag{6}$$

$$\cos\theta\,g_{xy} + \sin\theta\,g_{yy} = \sin\theta\,z_{rr} + \frac{\cos\theta}{r}\,z_{r\theta} - \frac{\cos\theta}{r^2}\,z_\theta \tag{7}$$

Vermenigvuldig linker- en rechterlid van (6) met $r^2\sin\theta$ en van (7) met $r^2\cos\theta$, en trek de nieuwe linker-en rechterleden van elkaar af, dan krijgen we

$$r^2\sin\theta\cos\theta\,g_{xx} + r^2\,(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,g_{xy} - r^2\,\sin\theta\cos\theta\,g_{yy} = -r\,z_{r\theta} + z_\theta\,.$$

Gebruik van $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ levert de gevraagde identiteit.

Opgave 3.
1. $\nabla\times\mathbf{F}(x,y,z) = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x) = (1-1, 1-1, 1-1) = 0.$
2. Find $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{F}$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x) + y + z\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + b(y) + z\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + y + c(z)\,. \tag{10}$$

From Eq. (8) we get $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x)+y+z$. Integrating with respect to x gives $f(x,y,z) = A(x)+yx+zx+g(y,z)$, where A is an integral of a (note that different choices for A differ only by constants which can be absorbed in the function g). Differentiating this f with respect to y should agree with the right hand side of Eq. (9). Equating the two gives $\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = b(y) + z$. Integrating with respect to y gives $g(y,z) = B(y) + zy + h(z)$ where B is an integral of b (similarly to above different choices for B differ by constants which can be absorbed in the function h). Hence $f(x,y,z) = A(x)+yx+zx+B(y)+yz+h(z)$. Differentiating this f with respect to z should agree with the right hand side of Eq. (10). Equating the two gives $c(z) = h'(z)$. Integrating with respect to z gives $h(z) = C(z)+d$ where $d \in \mathbb{R}$ is a constant. Hence

$$f(x,y,z) = A(x) + B(y) + C(z) + xy + xz + yz + d\,.$$

3. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y+z, x+y^2+z, x+y+z^3)$. As a parametrization of the straight line segment connecting p and q choose $X : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1-t)p + tq = (1-t, 1, t)$. Hence

$$\begin{aligned}\int_{pq} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^1 \mathbf{F}(X(t)) \cdot X'(t)\,dt = \int_0^1 (2, 2, 2-t+t^3) \cdot (-1,0,1)\,dt \\ &= \int_0^1 (t^3 - t)\,dt = [\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2]_0^1 = -\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Following part 2. the potential function is $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}z^4 + xy + xz + yz + d$. Hence $f(q) - f(p) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.

Opgave 4.
1. Using the definition of s we get $\iint\limits_D s'(x)\,dS = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dxdy$. We can get a parametrization of S_1 choosing $X : D \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (x, y, f(x))$. The tangent vectors for the coordinate lines are $\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} = (1, 0, f'(x))$ and $\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial y} = (0,1,0)$. Using this parametrization of S_1 we get for the area of S_1

$$\iint\limits_D \left\| \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} \times \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial y} \right\| dxdy = \iint\limits_D \|(-f'(x), 0, 1)\|\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dxdy$$

which agrees with the above.
2. This follows from Green's theorem. To this end define the vector field $F : (x,y) \mapsto M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ with $M(x,y) \equiv 0$ and $N(x,y) = s(x)$.
3. Here $f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2}$. Hence $s'(x) = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \ldots = \frac{1+4x^4}{4x^2} = \frac{1}{4x^2} + x^2$. Using 1. we get for the surface area

$$\int_{-2}^{2} \Big(\int_1^3 \frac{1}{4x^2} + x^2\,dx \Big)\,dy = 4[-\frac{1}{4x} + \frac{1}{3}x^3]_1^3 = 4\Big(-\frac{1}{12} + 9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\Big) = 36 - \frac{2}{3}\,.$$